



TITLE:

# 地球シミュレータによる地球環境 シミュレーション (複雑流体の数理解 析と数値解析)

AUTHOR(S):

大西, 檜平

---

CITATION:

大西, 檜平. 地球シミュレータによる地球環境シミュレーション (複雑流体の数理解析と数値解析). 数理解析研究所講究録 2011, 1724: 110-117

ISSUE DATE:

2011-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170468>

RIGHT:

# 地球シミュレータによる地球環境シミュレーション Earth simulator for the geoenvironment

東邦大学理学部 大西 樹平 (Shuhei Ohnishi)

FACULTY OF SCIENCE, TOHO UNIVERSITY

地球シミュレーターセンター、(独) 海洋開発研究機構

EARTH SIMULATOR CENTER, JAMSTEC

## Abstract

Recent developments on environmental problems for the earth by the earth simulator are reviewed for the general circulation of the atmosphere and ocean briefly. The model equations related with numerical calculation schemes are introduced. Since it became possible to deal with phenomena of the order of 1km mesh in horizontal direction, discussions on the microscopic physical processes would be more important in future.

## 1 地球流体

地球上での流体運動方程式を略述する。地球回転座標系における質量保存の式、運動量保存の式、エネルギー保存式（理想気体）は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\vec{\nabla} p - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \rho g \vec{k} + \vec{F} \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (p \vec{u}) = -(\gamma - 1)p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + (\gamma - 1)q_{heat} \quad (3)$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \equiv \eta \Delta \vec{u} \quad (4)$$

$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v}$ 。  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  をそれぞれ、経度、緯度、鉛直方向の基底ベクトルとして流体素片の位置ベクトルを  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 、速度ベクトルを  $\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  で表すと、 $\rho$  は密度、 $p$  は圧力、 $\eta$  は粘性係数、 $\vec{\Omega}$  は自転速度ベクトル、 $g$  は重力加速度。 $(\lambda, \phi, r)$  座標系では  $(dx = r \cos \phi d\lambda, dy = r d\phi, dz = dr, r = a + z)$ ,  $a$  は地球の半径。遠心力項  $\vec{C} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  は、 $\vec{\nabla} \times \vec{C} = 0$  であるため、外力項（重力項）に  $\vec{\nabla} \frac{\Omega^2 r^2}{2}$  のベクトル成分を加えればよい。それぞれを成分別に表すと

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{u}) = -\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\rho f_r v - 2\rho f_\phi w + \frac{\rho v u \tan \phi}{r} - \frac{\rho w u}{r} + F_\lambda \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v \vec{u}) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + 2\rho f_\lambda w - 2\rho f_r u - \frac{\rho u u \tan \phi}{r} - \frac{\rho w v}{r} + F_\phi \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho w \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial r} + 2\rho f_\phi u - 2\rho f_\lambda v - \frac{\rho u u + \rho v v}{r} - \rho g + F_r \quad (7)$$

$\vec{f} = \vec{\Omega}$ 。地球上における流体の基本的パラメータの大きさとして、 $a \sim 6.4 \times 10^6 m$ ,  $2\Omega \sim 10^{-4} s^{-1}$ , 水平、垂直方向の速度  $U \sim 10 m s^{-1}$ ,  $W \sim 10^{-2} m s^{-1}$ ,  $g = 9.8 m s^{-2}$ ,  $T \sim 10 s^5 \sim 1 day$ , 水平、垂直方向の長さ  $L \sim 10^6 m$ ,  $H \sim 10^4 m$  を考える。

$$|u| \ll 2\Omega a \cos \phi \quad (8)$$

$$|w \cos \phi| \ll |v \sin \phi| \quad (9)$$

(7) 式をオイラーの運動方程式で表し主要項のみで簡単化したものは

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (10)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \sim \frac{W}{T} \sim 10^{-7} m s^{-2} \quad (12)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \sim \frac{UW}{L} \sim 10^{-7} m s^{-2} \quad (13)$$

$$w \frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{W^2}{H} \sim 10^{-8} m s^{-2} \quad (14)$$

$$\frac{Dw}{Dt} \sim 10^{-7} m s^{-2} \ll g \sim 10 m s^{-2} \quad (15)$$

より静水圧平衡近似

$$\frac{\partial p}{\partial z} \simeq -\rho g \quad (16)$$

が成り立つと考えてよい。これをプリミティブモデルとよぶ。問題は、水平方向の解像度を例えば 100km から 10km まであげると雲等による熱輸送や平坦ではない地形や海底、海岸線の構造まで考慮しなければならないため静水圧平衡近似のままでは取り扱いえないことである。

## 2 シミュレーションモデル

地球シミュレータによる地球流体のシミュレーションのキーポイントは、全球モデルによる流体のダイナミクスを実現することであった。これは通常用いられているスペクトル法では面内基底関数となるルジャンドル球関数の次数が、例えば数 100km メッシュでは約 50 程度であったものが数 10km メッシュでは約 500 になることで、100 倍の基底関数が必要とされる。これらの基底関数の高速処理の成功が全球モデルシミュレーションを可能にした。一度全球計算に成功すれば、領域を細分化してより詳細な流れの構造をとらえることができる。海洋の大循環モデルは静水圧平衡を基準にして、非圧縮、Boussinesq 近似を用いたモデル (OFES) [1] がシミュレーションモデルとして用いられている。

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial \cos \phi v}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 w}{\partial r} \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} u + 2f_r v - 2f_\phi w + \frac{vu \tan \phi}{r} - \frac{wu}{r} - \frac{1}{\rho_0 r \cos \phi} \frac{\partial p'}{\partial \lambda} + F_\lambda \quad (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} v + 2f_\lambda w - 2f_r u - \frac{uu \tan \phi}{r} - \frac{wv}{r} - \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial p'}{\partial \phi} + F_\phi \quad (19)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} w + 2f_\phi u - 2f_\lambda v + \frac{uu + vv}{r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial r} - \frac{\rho'}{\rho_0} g + F_r \quad (20)$$

$$\frac{dp_0(r)}{dr} = -\rho_0(r)g, \quad p' = p - p_0, \quad \rho' = \rho - \rho_0 \quad (21)$$

$$\rho = \rho(T, c, p_0) \quad (22)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} c + F_c \quad (23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T + F_T \quad (24)$$

$c$ は塩分濃度である。(22)式の状態方程式はUNESCO[2]で与えられている。 $F_c$ は淡水 flux、 $F_T$ は海面での大気温度勾配や潜熱変化に伴う flux である。図1は海洋大循環モデルの計算結果の snapshot である。ビデオムービーは[1]の g allaly を参照されたい。図2は黒潮のシミュレーションである。大気の大循環モデルも静水圧平衡を基準にして、非圧縮、Boussinesq 近似によるモデル (AFES) [1] が用いられている。図3は全球モデルの台風に伴う雨量の分布の snapshot である。

圧縮性、非静水圧、理想気体モデルによる新しいモデルが開発されている。鉛直方向は terrain-following coordinate[3]に変換する。

$$z^* = \frac{H(z - z_s)}{H - z_s} \quad (25)$$

$$G^{1/2} = \frac{\partial z}{\partial z^*} \quad (26)$$

$$G^{13} = \frac{1}{G^{1/2}} \left( \frac{z^*}{H} - 1 \right) \frac{\partial z_z}{\partial \lambda} \quad (27)$$

$$G^{23} = \frac{1}{G^{1/2}} \left( \frac{z^*}{H} - 1 \right) \frac{\partial z_z}{\partial \phi} \quad (28)$$

$z, z_s, H$ はそれぞれ物理的な高さ、地表面の高さ、モデルの高さの最高値である。 $G^{1/2}, G^{13}, G^{23}$ は座標変換に伴う metric 項である。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{G^{1/2} a \cos \phi} \frac{\partial G^{1/2} \rho u}{\partial \lambda} + \frac{1}{G^{1/2} a \cos \phi} \frac{\partial G^{1/2} \cos \phi \rho v}{\partial \phi} \quad (29)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{\rho u G^{13}}{a \cos \phi} + \frac{\rho v G^{23}}{a} + \frac{\rho w}{G^{1/2}} \right) = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{u}) &= -\frac{1}{G^{1/2} a \cos \phi} \frac{\partial G^{1/2} \partial p'}{\partial \lambda} + 2\rho f_r v - 2\rho f_\phi w + \frac{\rho v u \tan \phi - \rho w u}{a} \\ &+ F_\lambda \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v \vec{u}) &= -\frac{1}{G^{1/2} a} \frac{\partial G^{1/2} \partial p'}{\partial \phi} + 2\rho f_\lambda w - 2\rho f_r u - \frac{\rho u u \tan \phi}{a} - \frac{\rho w v}{a} \\ &+ F_\phi \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho w \vec{u}) &= -\frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial p'}{\partial z^*} + 2\rho f_\phi u - 2\rho f_\lambda v - \frac{\rho u u + \rho v v}{a} - \rho g \\ &+ F_r \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{G^{1/2}a \cos \phi} \left( \frac{\partial G^{1/2}pu}{\partial \lambda} + \frac{\partial G^{1/2} \cos \phi pv}{\partial \phi} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{puG^{13}}{a \cos \phi} + \frac{pvG^{23}}{a} + \frac{pw}{G^{1/2}} \right) \\
& = -(\gamma - 1)p \left\{ \frac{1}{G^{1/2}a \cos \phi} \left( \frac{\partial G^{1/2}u}{\partial \lambda} + \frac{\partial G^{1/2} \cos \phi v}{\partial \phi} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{uG^{13}}{a \cos \phi} + \frac{vG^{23}}{a} + \frac{w}{G^{1/2}} \right) \right\} + (\gamma - 1)q_{heat}
\end{aligned} \tag{34}$$

スペクトル法の問題点は極近傍のメッシュが一樣ではなく、ある種の特異点になっていることである。局所的なメッシュは動的な適合型メッシュを用いることで台風などの時系列変化を精度よくシミュレーションできる。図4は大気と海洋の結合モデルによる台風のシミュレーションである。(23)と(24)式が海洋界面で熱、塩分、水蒸気等の flux が海洋モデルと一致するよう計算されている。

全地球モデルのメッシュを改良するために Yin-Young グリッド [4] とよばれる球面上で直交座標系からなる2枚のシートを、ちょうど野球のボールのように張り合わせることで構成する手法が考案された。2枚のつなぎ目の部分は、flux が保存するように内挿するが、3次の Lagrange 補間で精度が保たれることが確かめられている。このメッシュを用いたシミュレーションは容易に対象のスケール変化や大気と海洋の結合等に対応できるので MSSG (Multi-Scale Simulation for the Geoenvironment) 法としてより精度の高いシミュレーションに適用されている [1]。図5は Yin-Young グリッドの概念図、図6は海底地形を考慮した海洋循環シミュレーション、図7は台風通過時の局所的な気象変化のシミュレーション結果である。

### 3 まとめ

地球流体計算における境界条件に関する取り扱いは、海面 flat で shear stress の連続、normal stress は海面付近約 10 m 程度のまで考慮されている。圧縮性の大気のダイナミクスは解像度があがると音波の影響が強くなるため、厚さ 40 km 程度では成層圏に達するため速度成分に対する境界条件には境界近く約 10 km 程度減衰項を付加する。MSSG では、最近水平方向は3次の風上差分で陽解法、鉛直方向は時間積分3次の Runge-Kutta 法による陰解法が用いられている。解像度が上がるにつれ雲や雨滴のミクロな物理化学的取り扱いが今後必要とされる。



図 1: 海洋循環、色は温度に対応。(地球シミュレーターセンター (ESC))

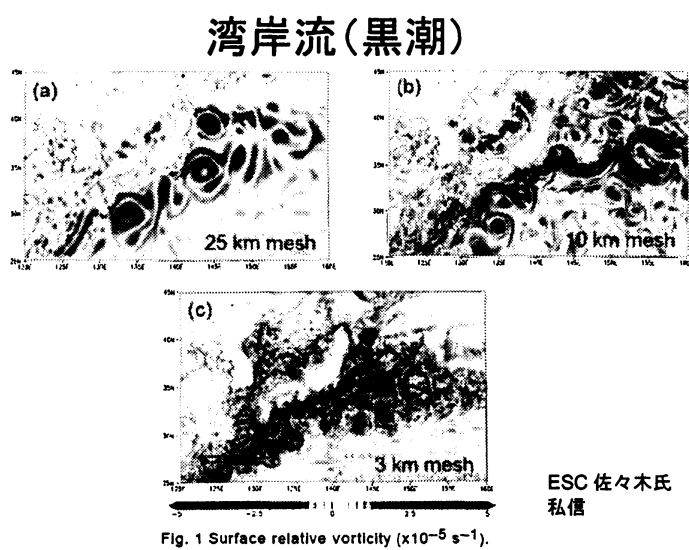


図 2: 黒潮 (地球シミュレーターセンター (ESC))

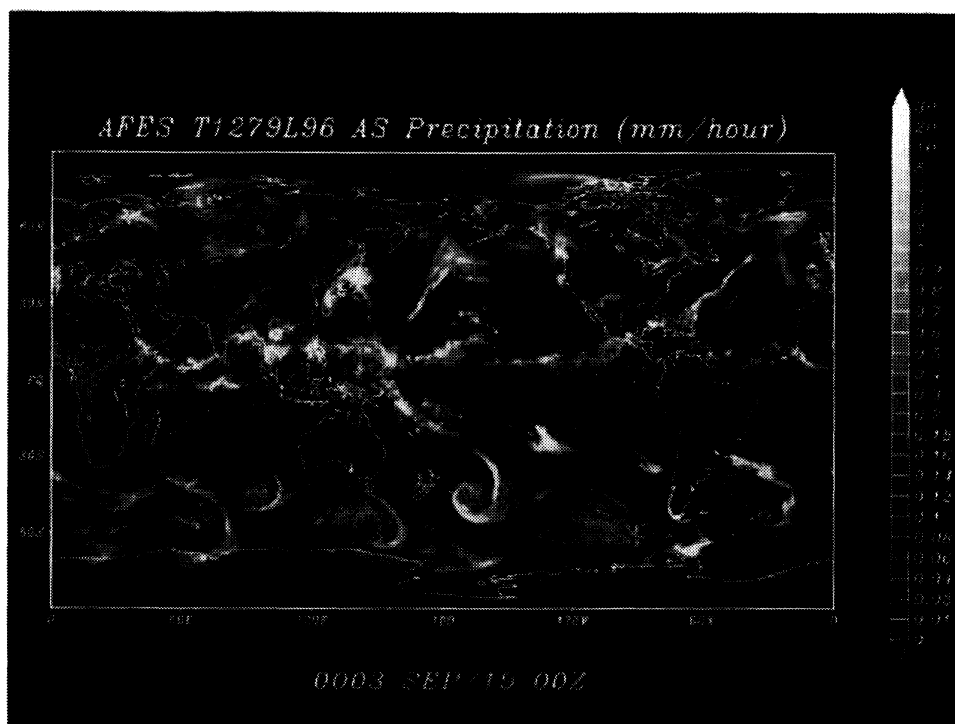


図 3: 台風全球モデル (地球シミュレーターセンター (ESC))

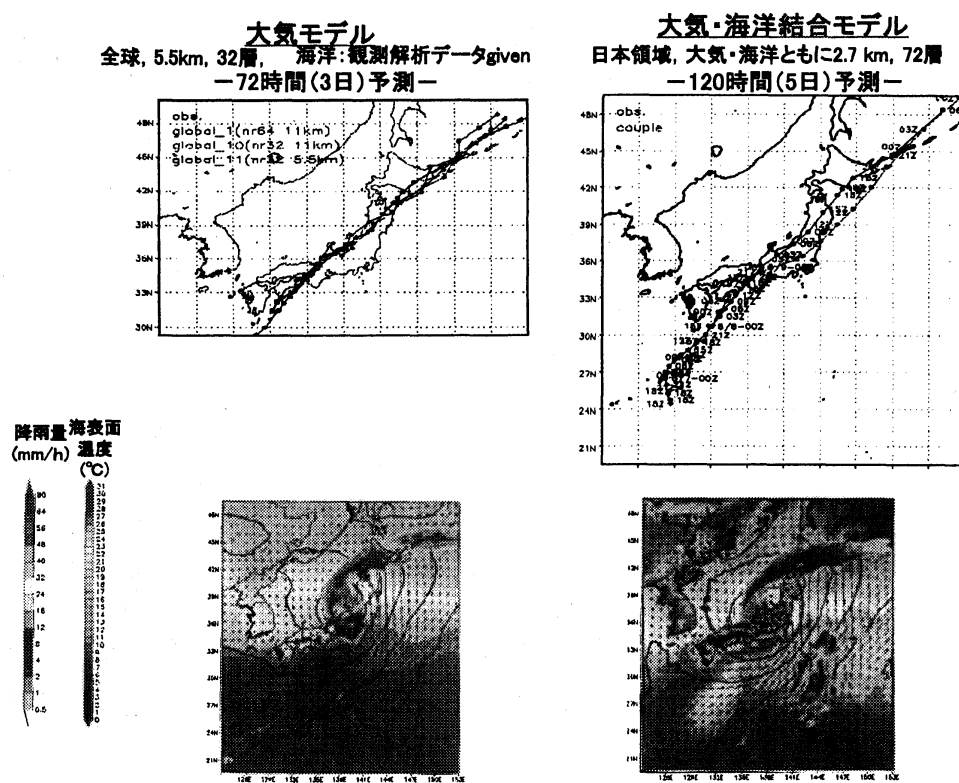
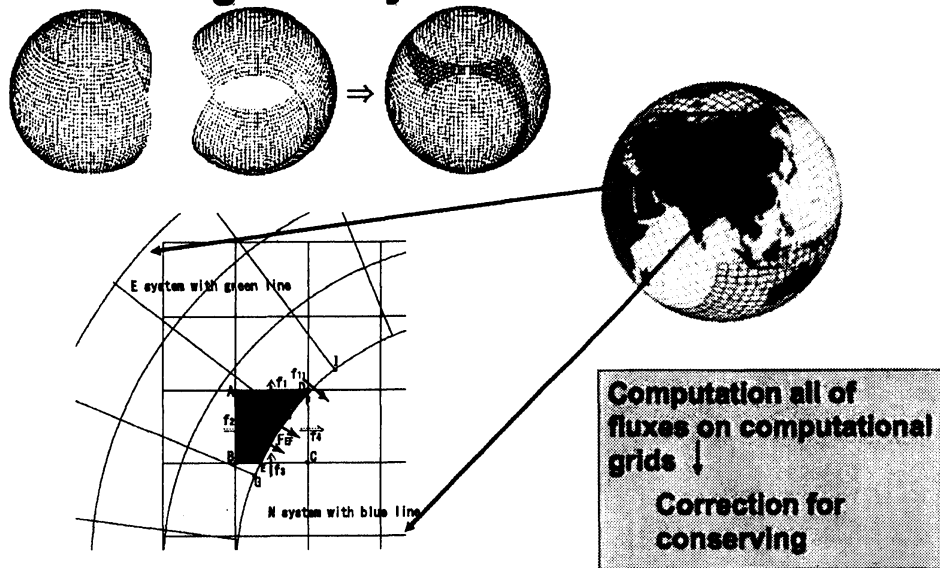


図 4: 台風 (地球シミュレーターセンター (ESC))

## Yin-Yang Grid System



For flux  $F_{EF}$  on a circular arc  $EF$  shown as red circle is computed by the budget of fluxes  $f_N$  by on grid  $ABCD$  of N system and flux  $f_E$  estimated on a circular arc  $GHI$  of E system.

図 5: グリッド (ESC)

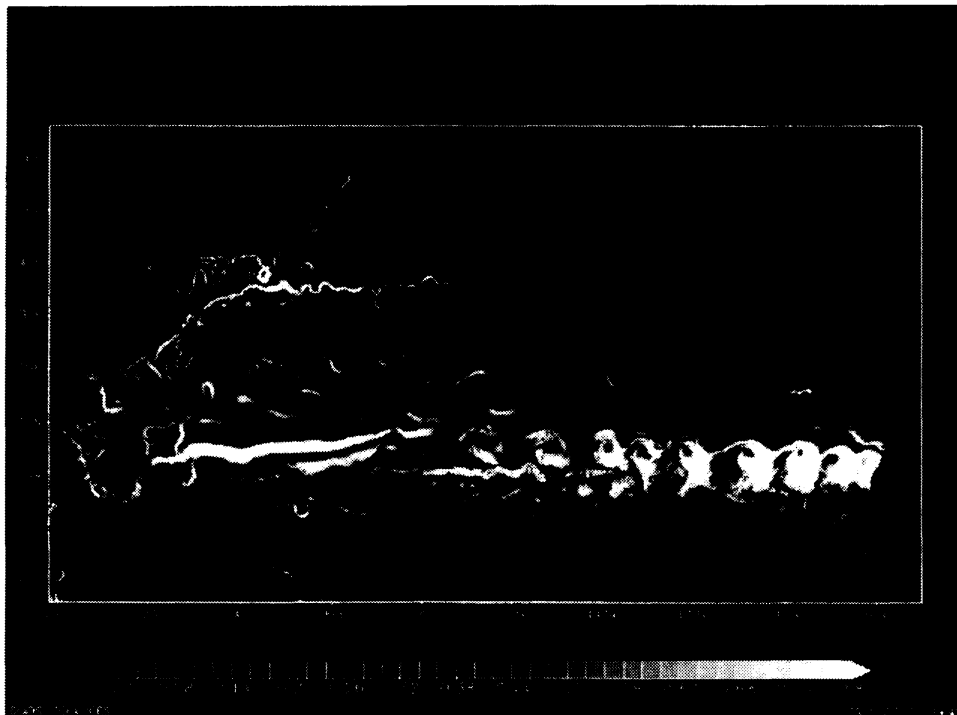


図 6: MSSG による北太平洋海洋大循環。2.78km メッシュ。鉛直方向 40 層。15 年間の積分値が表示されている。OFES による月ごとの計算結果を利用。(ESC)



# 台風時における海洋深さ5mの流れの速さ MSSGによる予測シミュレーション結果

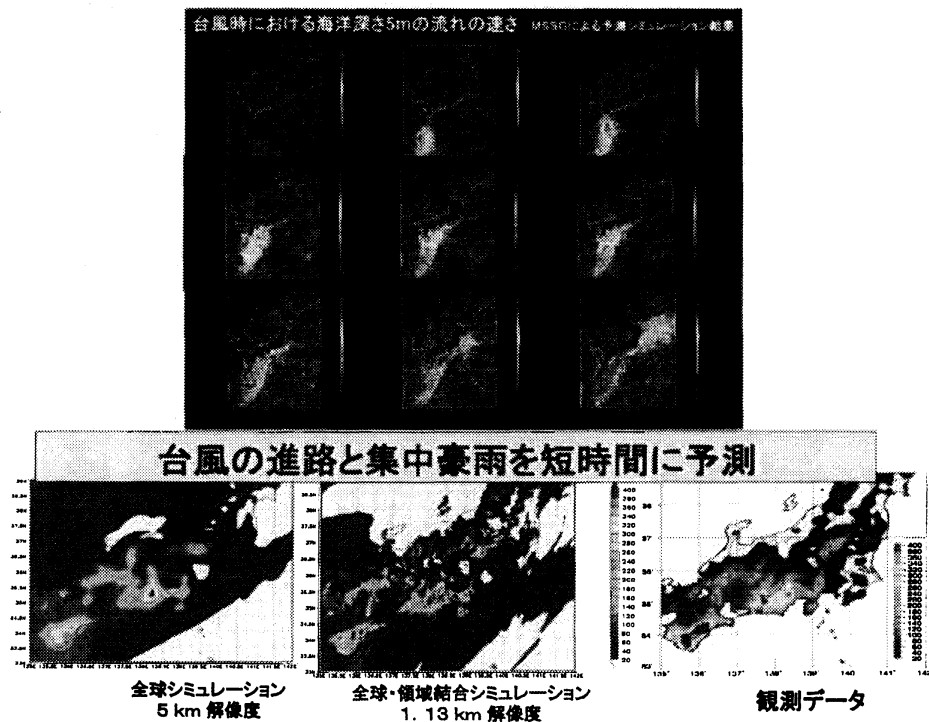


図 7: MSSG による台風に伴う気象変化。(ESC)

## 謝辞

地球シミュレーターセンターの高橋桂子博士には当該分野の最新の情報等提供していただきましたことを感謝いたします。

- [1] [www.jamstec.go.jp/esc](http://www.jamstec.go.jp/esc)  
Journal of the earth simulator 参照
- [2] UNESCO, UNESCO Technical papers in marine science, 36, 25pp, 1981.
- [3] Gal-Chen, T., and C.J. Somerville, J. Comp. Physics, 17, 209-228, 1975.
- [4] Kageyama, A., and T. Sato, Geochim. Geophys. Geosyst., 5 Q09005, 2004. A. Kageyama, J. Earth Simulator, 3, 20-28, 2005. Peng, X., F., Xiao, and K. Takahashi, Q. J. R. Meteorol. Soc., 132, 979-996, 2006.